Пусть λ' есть собственное число ядра N уравнения (7), q — ранг этого числа, $\{u_k(x)\}$ — соответствующая система собственных функций.

Теорема 3. Система функций

$$v_k(x) = \lambda' \int_{x_0}^{x} H(x, \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{11}$$

обладает следующими свойствами:

1) функции $v_k(x)$ не равны тождественно нулю;
2) линейно независимы в промежутке (a, b);
3) для значений $\lambda = \lambda'$ дают решение задачи Коши однородного интегро-дифференциального уравнения (10) с нулевыми начальными условиями.

Доказательство. Применяя к функциям (1) оператор F, получим следующие обращения формул (11):

$$F[v_k(x)] = \lambda' \int_a^b N(x, t)\, u_k(t)\, dt \equiv u_k(x). \tag{12}$$

Отсюда сразу вытекает первое утверждение теоремы, ибо если допустить $v_k(x) \equiv 0$, то и $u_k(x) \equiv 0$, что невозможно. Линейная независимость функций (11) очевидна из (12).

Наконец, применяя к функции (11) оператор L, получим

$$L[v_k(x)] = \lambda' u_k(x).$$

Сопоставляя этот результат с равенством (12), мы видим, что подстановка функций (11) в уравнение (1) приводит к тождеству

$$u_k(x) \equiv \lambda' \int_a^b N(x, t)\, u_k(t)\, dt.$$

3. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ есть система собственных функций союзного интегрального уравнения по отношению к уравнению (7).

Допустим, что выполнены условия разрешимости уравнения (7) для значений $\lambda = \lambda'$.

Учитывая второе из равенств (8), это условие можно представить в виде

$$a_{k1}C_1 + a_{k2}C_2 + \ldots + a_{kn}C_n = b_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{13}$$

где

$$a_{ki} = \int_a^b \psi_k(x)\, F[y_i(x)]\, dx$$

и

$$b_k = -\int_a^b \psi_k(x)\, F[\varphi(x)]\, dx.$$

Если $u^{(0)}(x)$ — частное решение уравнения (7) для $\lambda = \lambda'$, то уравнение (1) имеет решение:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda' \int_{x_0}^{x} H(x, \eta)\, u^{(0)}(\eta)\, d\eta + \sum_{k=1}^{q} A_k v_k(x), \tag{14}$$

где A_k — произвольная постоянная и $v_k(x)$ определяется формулами (11).